
7. MODELADO EN DINAMICA DE SISTEMAS

7.1. Dinámica de Sistemas

El origen de la dinámica de sistemas se encuentra ligado al desarrollo de una aplicación para analizar los pedidos de una empresa fabricante de componentes electrónicos.

Se observaba que aunque el número de clientes era pequeño y por lo tanto el flujo de pedidos se esperaba constante, aparecían no obstante grandes oscilaciones en el mismo.

Se investigaron técnicas de investigación operativa y se realizaron simulaciones bajo el método de Monte-Carlo, dirigido todo por el grupo de J. Forrester. Este método resultó ser insuficiente para dar una explicación razonable al tiempo que se descubrió que una combinación de retrasos en la transmisión de información con estructuras de realimentación que se producían dentro del modelo, eran el origen de las oscilaciones.

En efecto, en sistemas autorreguladores si se introducen retrasos en la cadena de acciones que producen la regulación, se provocan oscilaciones. (Ej: aparcamiento de un coche).

Este trabajo dió pie a una posterior sistematización del comportamiento de sistemas en términos de bucles de realimentación y retrasos, dando lugar a la Dinámica de Sistema, tal que los sistemas incluidos objeto del estudio van a ser aquéllos que tienen en común una serie de características:

1. Existencia de bucles de realimentación

Definiendo un bucle de realimentación como una cadena cerrada de acciones elementales entre los elementos de un sistema, se tiene constancia de sistemas cuya dinámica incluye esta estructura, tales como:

- sistema de regulación de temperatura de habitación mediante un termostato.
- sistema de regulación de CO₂ en sangre.
- sistema de nivel de producto en almacén y ritmo de producción del mismo

En la figura 7.1. se muestra el bucle de realimentación del sistema de regulación de CO₂ en sangre.

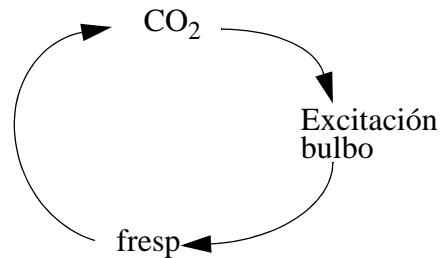


Figura 7.1. Sistema de Regulación de CO₂ en sangre

2. Comportamiento antiintuitivo:

En los sistemas simples la causa y el efecto se suelen producir cercanos en el tiempo y en el lugar. Por el contrario, en sistemas complejos objeto de este estudio la causa puede estar muy alejada tanto en el tiempo como en el lugar del efecto.

Ejemplo: Sistema social "empleo".

facilidad de empleo(causa) ⇒ atracción personas ⇒ tráfico ⇒ polución
 hacinamiento ⇒ disminución personas(efecto)

Se produce pues un efecto posterior contrario al efecto esperado inicialmente.

3. Insensibilidad

La noción de sensibilidad pretende establecer en que medida se altera el comportamiento normal de un modelo de un sistema como consecuencia de la variación de uno de sus parámetros.

La existencia de bucles de realimentación en el sistema reduce la sensibilidad del sistema respecto a sus parámetros.

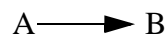
La Dinámica de Sistemas se va a ocupar solamente de aquellos sistemas que pueden ser representados en forma continua y determinista

$$\frac{dy}{dt} = \varnothing(y, u, t) \quad (7.1)$$

7.2. Diagramas Causales

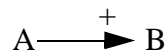
Representa las relaciones de influencia que se dan entre los elementos de un sistema y por lo tanto permite conocer la estructura del mismo.

La relación entre una variable A y otra B del sistema se representará mediante una flecha,

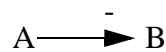


leyéndose " A influencia a B ".

Sobre la flecha se indicará mediante signo $+$ o $-$ el tipo de relación



siendo positiva cuando las variaciones de A y B son del mismo sentido, y



negativa en caso de variación de sentido contrario.

El desarrollo del diagrama causal es un proceso que implica la realización de

- observaciones sobre el sistema
- discusiones con especialistas
- análisis sobre datos del sistema

El proceso seguido en el desarrollo sigue los pasos a continuación:

1. Elección de variables o elementos a representar del modelo del sistema.
2. Evaluación cualitativa (no numérica) de las relaciones entre estos elementos cuando las hubiere.

3. Construcción del diagrama causal.

Los diagramas causales se clasifican según su estructura en:

a) diagramas abiertos, de estructura simple (fig. 7.2).

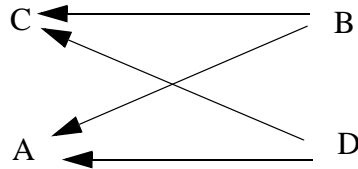


Figura 7.2. Diagrama Causal Abierto

b) diagramas cerrados, de estructura compleja o bucles de realimentación (fig. 7.3).

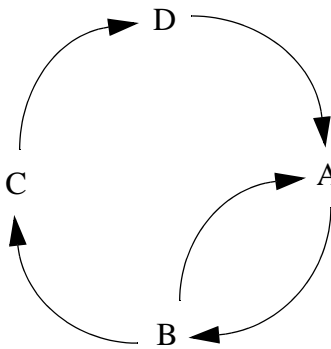


Figura 7.3. Diagrama Causal Cerrado

Tipos de Bucles de Realimentación

Los bucles de realimentación pueden ser de dos tipos:

1. Realimentación positiva: Aquellos en los que la variación de un elemento se propaga a lo largo del bucle de manera que refuerza la variación inicial, como se ilustra en la figura 7.4. Tienden a generar comportamiento de crecimiento.

En general, un bucle de realimentación es positivo si contiene un número par de relaciones negativas o bien todas las relaciones son positivas.

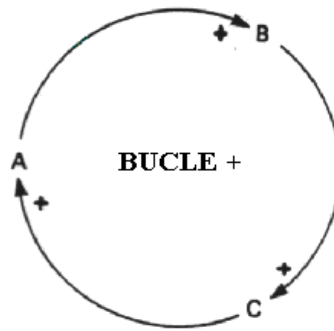


Figura 7.4. Bucle de Realimentación Positivo

Ejemplo: natalidad de población



Figura 7.5. Bucle de Natalidad

2. Realimentación negativa: Aquéllos en los que una variación de un elemento se transmite a lo largo del bucle de manera que determine una variación que contrarreste la variación inicial, como se ilustra en la figura 7.6. Tiende a generar comportamiento de equilibrio.

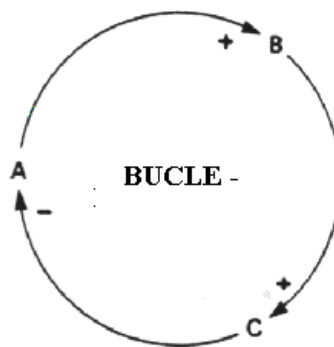


Figura 7.6. Bucle de Realimentación Negativo

Ejemplo: natalidad de población con influencia de comida

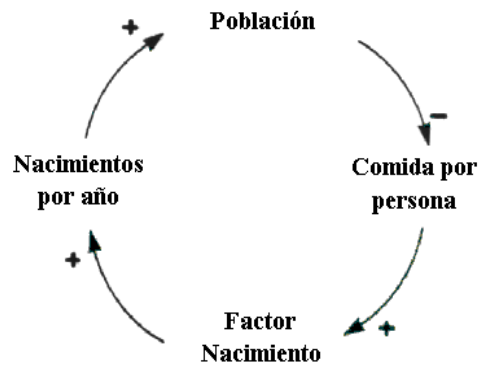


Figura 7.7. Bucle de Natalidad con Influencia de Comida

Un bucle de realimentación es negativo si contiene un número impar de relaciones negativas.

En todo diagrama causal coexisten normalmente bucles positivos con bucles negativos. Las interacciones entre estos determinan el comportamiento global del sistema.

Ejemplo: combinación de bucles de natalidad

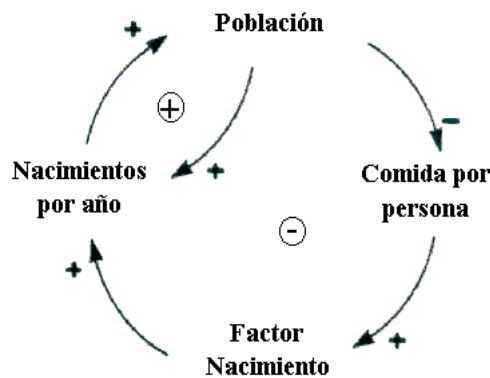


Figura 7.8. Bucles de Realimentación Positivos y Negativos

El comportamiento dependerá de la dominancia de cada bucle, tal que para el ejemplo de la natalidad se observa que

- $t = 0$, domina el bucle positivo, de crecimiento al no saturarse la comida.
- $t = \infty$, domina el bucle negativo, al agotarse los recursos, produciéndose limitación de nacimientos.

Se obtiene un comportamiento combinado, llamado "comportamiento en S" con dominio inicial del bucle positivo y posterior del bucle negativo que acaba imponiéndose, según se ilustra en la figura 7.9.

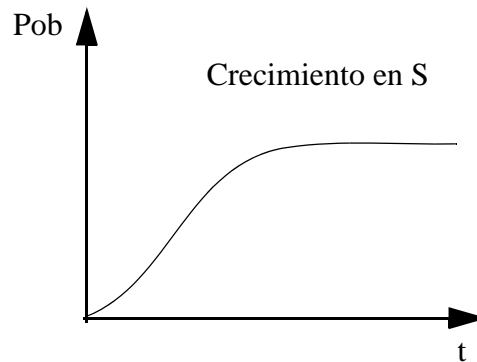


Figura 7.9. Comportamiento en S

Es importante señalar que es la existencia de bucles de realimentación y no las simples relaciones causa-efecto la que determina el comportamiento global del sistema.

Reglas para la Obtención de Diagrama Causales

Se han de evitar cometer errores en la construcción de diagramas causales, para ello se observarán las siguientes reglas:

1. Evitar bucles ficticios (no válidos).
2. Emplear elementos caracterizables por números (no abstracciones).
3. No emplear dos veces la misma relación.
4. Evitar bucles redundantes.
5. No emplear el tiempo como factor causal.

7.3. Diagramas de Forrester

Los elementos que intervienen en un diagrama causal se representan por medio de variables que pueden ser de tres tipos:

- variables de nivel

- variables de flujo
- variables auxiliares

Para ayudar a comprender el significado de estas tres clases de variables y facilitar su identificación en el diagrama causal se utiliza un analogía del diagrama con un sistema hidrodinámico.

Analogía Hidrodinámica

El sistema hidrodinámico está constituido por tres depósitos con tres niveles N_1, N_2, N_3 , que acumulan líquido, y se representa en la figura 7.10.

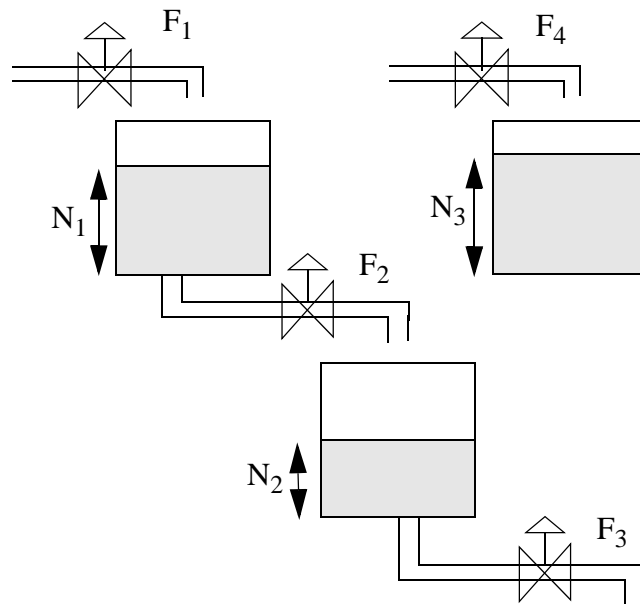


Figura 7.10. Analogía Hidrodinámica

Las variaciones de nivel vienen dadas por los flujos F_1, F_2, F_3 y F_4 que son controladas mediante válvulas por sendos operadores.

Las actuaciones en las válvulas son función de los diferentes niveles en los depósitos.

Con la analogía hidrodinámica en función de niveles, flujos y actuaciones se tiene una forma intuitiva de representar un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\frac{dN_1}{dt} = F_1 - F_2 \quad (7.2)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = F_4 \quad (7.3)$$

$$\frac{dN_3}{dt} = F_2 \angle F_3 \quad (7.4)$$

con los flujos dados por la expresión

$$F_i = f_i(N_1, N_2, N_3), \quad i = 1, \dots, 4 \quad (7.5)$$

siendo las funciones f_i no lineales en general y que representan las actuaciones en las válvulas.

La determinación de F_i puede realizarse en varios pasos intermedios empleando variables auxiliares A_i ,

$$A_1 = \emptyset_1(N_1, N_2) \quad (7.6)$$

$$A_2 = \emptyset_2(A_1, N_3) \quad (7.7)$$

$$F_1 = \emptyset_3(A_2) \quad (7.8)$$

que conducen a la expresión de F_1

$$F_1 = f_1(N_1, N_2, N_3) \quad (7.9)$$

La analogía hidrodinámica se puede completar con la inclusión de variables exógenas E a la hora de determinar los flujos F_i , tal que

$$F_i = f_i(N_1, N_2, N_3, E) \quad (7.10)$$

Se ha visto que la analogía hidrodinámica determinada por niveles, flujos y auxiliares tiene asociada un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, por lo tanto, y de ahí su interés, un diagrama causal que venga determinado por variables de nivel, flujo y auxiliares podrá ser también descrito por analogía mediante un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

De esta manera, a partir del diagrama causal de un modelo, construido de forma intuitiva, se puede obtener un modelo matemático descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, sin más que determinar cuales son las variables de nivel, flujo y auxiliares.

Diagramas de Forrester

El diagrama de Forrester es una representación simbólica de las variables de nivel, flujo y auxiliares de un diagrama causal una vez identificadas y constituye un paso intermedio entre el diagrama causal y el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que le corresponde.

Los símbolos que aparecen en el diagrama vienen dados en la figura 7.11.

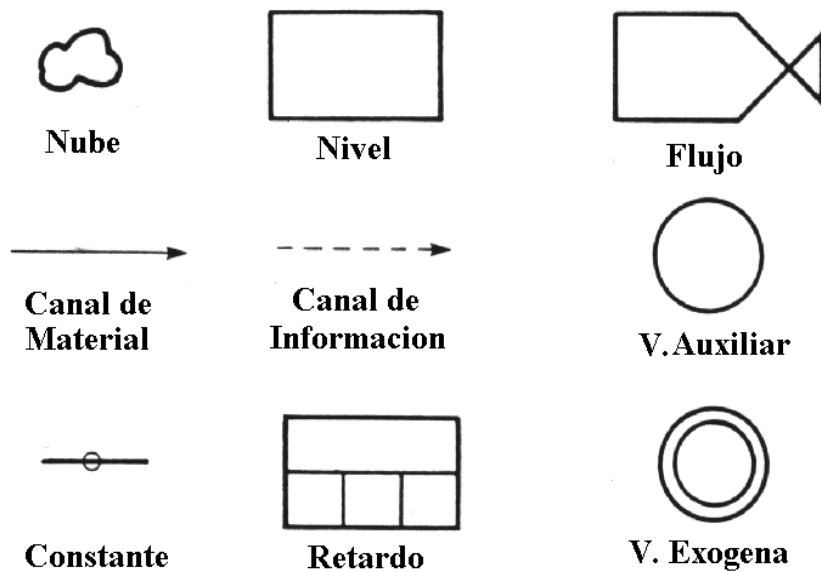


Figura 7.11. Símbolos del Diagrama de Forrester

A continuación se caracterizan los tipos de variables que aparecen en el diagrama de Forrester.

Variables de Nivel

Son aquellas variables cuya evolución es significativa para el estudio del sistema y son equivalentes a las variables de estado de un sistema en descripción interna.

Físicamente se definen como magnitudes que acumulan los resultados de acciones tomadas en el pasado, como ocurre en los niveles de los depósitos de la analogía hidrodinámica que acumulan líquido resultado de la apertura de las válvulas. De ahí el nombre de variable de nivel.

Una característica común a las variables de nivel es que cambian lentamente en respuesta a las variaciones de otras variables, en concreto de las variables de flujo.

A cada nivel $N(t)$ se le puede asociar un flujo de entrada $F_e(t)$ y salida $F_s(t)$, de acuerdo con

$$N(t) = N(t_0) + \int_{t_0}^t (F_e \angle F_s) dt \quad (7.11)$$

o bien en forma diferencial

$$\frac{dN}{dt} = F_e \angle F_s \quad (7.12)$$

ecuación denominada de nivel y cuya representación en diagrama de Forrester se muestra en la figura 7.12..

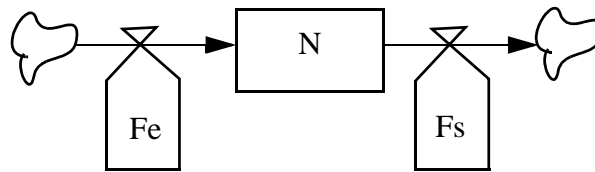


Figura 7.12. Diagrama de Forrester de la Ecuación de Nivel

Una variable de nivel no puede influir directamente en otra variable de nivel, sino es a través de un flujo.

Variables de flujo

Son aquellas variables que determinan las variaciones en las variables de nivel del sistema y caracterizan las acciones que se toman en el sistema las cuales quedan acumuladas en los niveles correspondientes.

Físicamente expresan como se convierte la información disponible del sistema en una acción y están asociadas a las válvulas de la analogía hidrodinámica.

A cada flujo $F(t)$ se le asocia una ecuación llamada ecuación de flujo o función de decisión que admite como variables de entrada niveles, auxiliares y constantes, en la forma general

$$F(t) = TN \cdot M(t) \cdot N(t) \quad (7.13)$$

siendo TN el flujo normal (constante), $M(t)$ el multiplicador del flujo normal (auxiliar) y $N(t)$ (nivel). El diagrama de Forrester de la ecuación de flujo vienen dada en la figura 7.13.

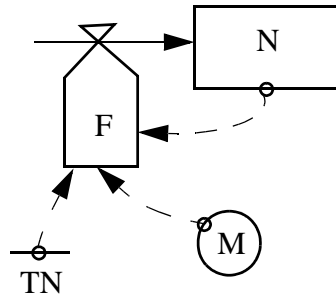


Figura 7.13. Diagrama de Forrester de la Ecuación de Flujo.

En general el multiplicador de flujo normal es producto de k multiplicadores M_i cada uno función de una variable V_i

$$M(t) = M_1(V_1(t))M_2(V_2(t))\dots M_n(V_n(t)) \quad (7.14)$$

Cada M_i establece la contribución de la variable V_i en la acción a tomar que define el flujo $F(t)$, con $M_i(V_{in}) = 1$, siendo V_{in} el valor normal de V_i , que en general será variable de nivel o variable auxiliar.

A todo nivel se le asocia al menos una variable de flujo. Por otro lado, las variables de flujo tienen como entradas (información) exclusivamente variables de nivel, variables auxiliares o variables exógenas y nunca se podrán conectar entre sí.

Las unidades de medida de un flujo han de ser consistentes con las variables que relaciona, en general $unidad\ de\ flujo = \frac{unidad\ de\ nivel}{tiempo}$.

Variables auxiliares

Las variables auxiliares representan pasos en los que se descompone el cálculo de una variable de flujo a partir de los valores tomados por los niveles.

El propósito del uso de las variables auxiliares está en facilitar la comprensión y definición de las variables de flujo ya que las variables auxiliares suelen representar en sí mismas conceptos individuales.

En la analogía hidrodinámica ya se justificó la utilización de las mismas para definir la relación $F_i = f_i(N_1, N_2, N_3)$ mediante

$$A_1 = \varnothing_1(N_1, N_2) \quad (7.15)$$

$$A_2 = \varnothing_2(A_1, N_3) \quad (7.16)$$

$$F_1 = \varnothing_3(A_2) \quad (7.17)$$

cuya representación en diagrama de Forrester viene dada en la figura 7.14.

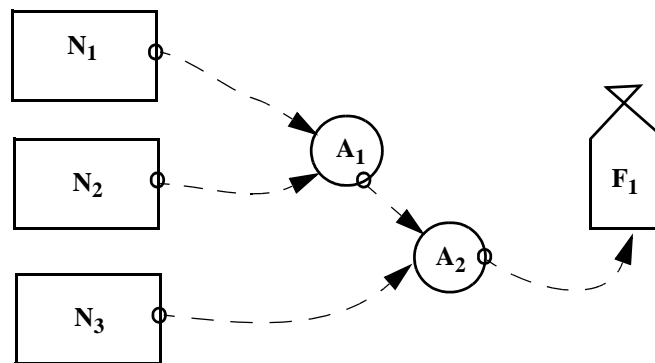


Figura 7.14. Diagrama de Forrester de la Relación F_i .

Si dos variables A y B están relacionadas por

$$B = f(A) \quad (7.18)$$

siendo f no lineal, B variable auxiliar y A variable de nivel, se emplea el símbolo en el diagrama de Forrester de la figura 7.15.

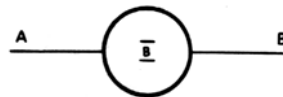


Figura 7.15. Símbolo de Relación No-lineal

Otros elementos

- Fuentes y sumideros:

Un nivel puede alimentarse, a través de un flujo desde otro nivel o bien desde una fuente exterior al sistema. Esta fuente se supone de capacidad infinita y se representa mediante una nube, tal como se ilustra en la figura 7.16.



Figura 7.16. Símbolo de Fuente

Un nivel puede vaciarse, a través de un flujo sobre otro nivel o sobre un sumidero exterior al sistema. De la misma forma, el sumidero se supone de capacidad infinita y se representa mediante una nube, como se muestra en la figura 7.17.



Figura 7.17. Símbolo de Sumidero

- Canales de material e información:

Las variables de nivel, flujo y auxiliares están ligadas entre sí por medio de canales. Hay dos clases,

- canales de material
- canales de información

Los niveles acumulan flujos materiales que llegarán mediante canales de material y las variables de flujo y auxiliares se alimentan a partir de canales de información.

Retrasos

Una característica a considerar en el estudio de sistemas dinámicos es el retraso producido, en la transmisión de material o en la transmisión de información (figura 7.18).

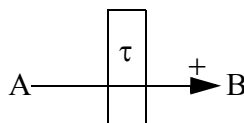
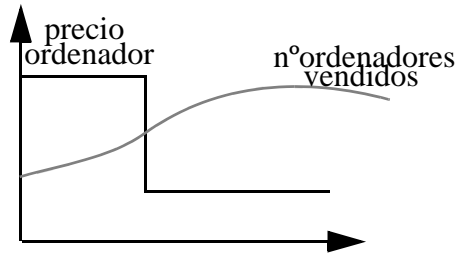
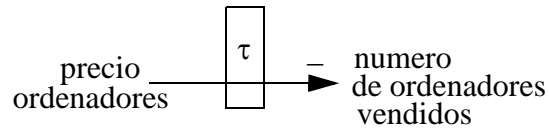


Figura 7.18. Retraso

Ejemplo:



El precio disminuye subitamente, luego el numero de ordenadores vendidos no aumenta instantaneamente, debido al retraso porque la percepción del cambio de precio requiere tiempo.

1. Retrasos en la transmisión de material.

Se produce cuando existen elementos en el sistema que almacenan temporalmente el material que fluye por el mismo (figura 7.19).

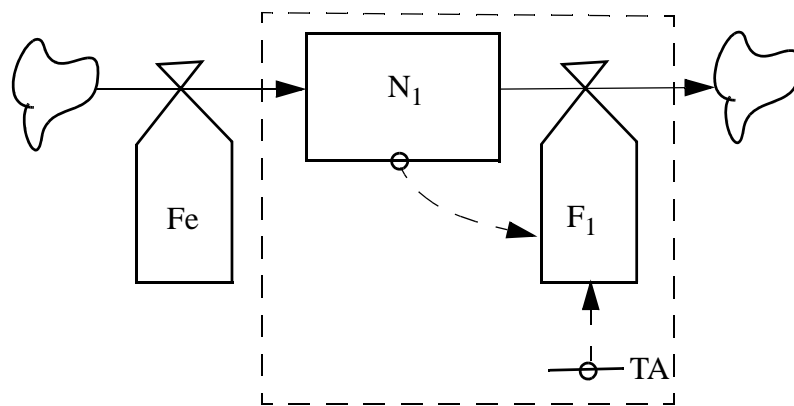


Figura 7.19. Nivel de Almacen Temporal.

La ecuacion que rige el comportamiento es

$$\left. \begin{aligned} N_1(t) &= N_1(0) + \int_0^t (FE - F_1(t)) dt \\ F_1(t) &= \frac{N_1(t)}{TA} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dN_1}{dt} + \frac{N_1}{TA} = FE \quad (7.19)$$

Esta ecuación representa el retraso de primer orden, debido a que hay un nivel y su símbolo en el diagrama Forrester viene dado en la figura 7.20.

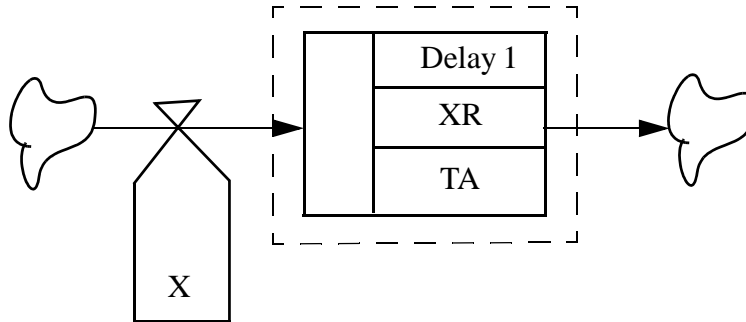


Figura 7.20. Retraso de Primer Orden.

2. Retraso en transmisión de información

Se produce cuando hay que conservar y almacenar información del sistema antes de proceder a una toma de decisión.

Los retrasos de información representan un mecanismo de filtro capaces de alisar los picos que presenta la evolución de una variable teniendo un valor promedio de la misma como referencia.

En este proceso la información mas reciente influye en el promedio de forma mas significativa que la antigua.

El empleo de filtros alisadores se justifica por el hecho de que la información empleada para la toma de decisiones contiene errores, comportamientos individuales, periodos no uniformes, intermitencias, etc.

El filtrado reduce el ruido de alta frecuencia e introduce un retraso tal que, en la medida que disminuya el ruido, aumentará el retraso.

Por tanto, si el filtrado equivale a un retraso su representación en terminos de niveles y flujos vendrá dada por la figura 7.22,

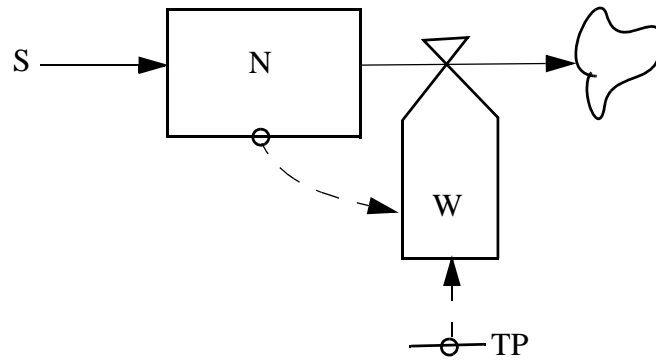


Figura 7.21. Retraso de Información

cuya ecuación corresponde a

$$N(t) = N(0) + \int_0^t (S(t) \angle F(t)) dt \tag{7.20}$$

$$F(t) = \frac{N(t)}{TP}$$

con TP tiempo promedio
